Tussentoets Wiskunde Blok I

Maandag 20 oktober 2014

Veel succes!

1. Gegeven is de lijn
$$\frac{y}{12} - \frac{1}{3} = x$$
   (a) Geef de vergelijking van de lijn die parallel is aan bovenstaande lijn en door het punt (2,4) gaat.
   (b) Geef de vergelijking van de lijn die loodrecht op de bovenstaande lijn staat en door het punt (-1,6) gaat.

2. Los de volgende ongelijkheid op met behulp van wiskunde
$$3 \leq |2x - 1| \leq 9$$

3. Gegeven is de derde-graads functie
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$
   (a) Iemand beweert dat deze functie deelbaar door $(x-2)$. Laat zien dat dit persoon gelijk heeft.
   (b) Laat met behulp van wiskunde zien welke nulpunten $f(x)$ heeft.
   (c) Voor welke waarde(n) van x geldt
$$f(x) \geq 0$$

4. Stel dat $\sin(\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ bepaal dan $\cos(\theta)$, $\sin(2\theta)$ en $\tan(2\theta)$.

5. Laat zien dat de volgende goniometrische gelijkheid correct is:
$$\tan(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{\sin(2\theta)}$$

6. Gebruik de eigenschappen van logaritmen om de volgende uitdrukking om te werken naar sommen en verschillen van zo eenvoudig mogelijke logaritmen
$$\ln\left(\frac{x^3 \tan^3(x)}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

7. Gegeven is de functie
$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

   (a) Bepaal het domein en bereik van $f(x)$ en motiveer dat in wiskundige bewoordingen.

   (b) Bestaat er een inverse **functie**? Waarom wel of waarom niet? Motiveer.

   (c) Indien het antwoord 'ja' is, bepaal dan $f^{-1}(x)$. Indien 'nee', ga door naar de volgende opgave.

8. Voor welke waarde van het getal $a \in \mathbf{R}$ geldt
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{ax^2+1}{2x^2-5} = \frac{9}{4}$$

   Hint: Kalm blijven, is vrij simpel...

9. Bepaal de volgende limiet
$$\lim_{x\to 9^+} \frac{x+9}{x^2-81}$$

10. Gegeven is de functie
$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

   Bepaal de inverse functie $f^{-1}(x)$ en het domein van de inverse functie.

TT 2014 Blok I

1. $\frac{y}{12} - \frac{1}{3} = x \qquad y - \frac{12}{3} = 12x$

$f(x) = y = 12x + 4$

a. Lijn parallel aan $f(x)$ die door $(2,4)$ gaat ?

$$g(x) = 12x + b$$

↳ Rico het zelfde !

$$4 = 24 + b \rightarrow b = -20$$

$$g(x) = 12x - 20$$

b. $\perp$ op $f(x)$ en door $(-1,6)$

$h(x) = ax + c \qquad f(x) \perp g(x) \rightarrow 12 \cdot a = -1$

$$a = -\frac{1}{12} \rightarrow h(x) = -\frac{1}{12} \cdot x + c$$

$$6 = \frac{1}{12} + c \rightarrow c = 6 - \frac{1}{12} = 5\frac{11}{12}$$

$$h(x) = -\frac{1}{12}x + 5\frac{11}{12}$$

2. $3 \leq |2x - 1| \leq 9$

4 mogelijkheden :

$2x - 1 \leq 9 \rightarrow 2x \leq 10 \rightarrow \boxed{x \leq 5}$

$-(2x-1) \leq 9 \rightarrow -2x + 1 \leq 9 \rightarrow$

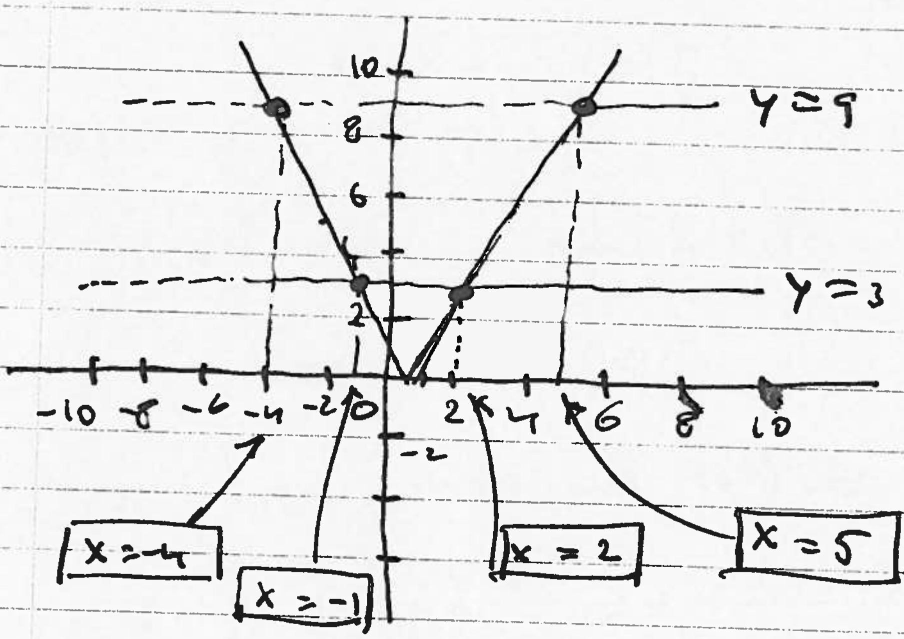
$-2x \leq 8 \rightarrow 2x \geq -8 \quad \boxed{x \geq -4}$

$3x \leq 2x - 1 \rightarrow 4 \leq 2x \rightarrow 2x \geq 4$

$\boxed{x \geq 2}$

$3x \leq -(2x-1) \rightarrow 2 \leq -2x \rightarrow$

$-2 \geq 2x \rightarrow 2x \leq -2 \rightarrow \boxed{x \leq -1}$



$-4 \leq x \leq -1 \wedge 2 \leq x \leq 5$

3. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

a. Deelbaar door $(x-2)$

$$
\begin{array}{l}
x-2 \,/\, x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \,\backslash\, x^2 - 4x + 3 \\
\quad x^3 - 2x^2 \quad - \\
\hline
\quad -4x^2 + 11x \\
\quad -4x^2 + 8x \quad - \\
\hline
\quad 3x - 6 \\
\quad 3x - 6 \\
\hline
\quad 0
\end{array}
$$

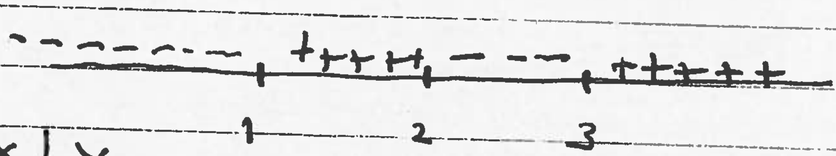
$x-2=0 \vee x^2-4x+3=0$

↓

$(x-1)(x-3)=0$

$\boxed{x=2} \vee \boxed{x=1} \vee \boxed{x=3}$

c. $f(x) \geq 0$ tekenverloop:

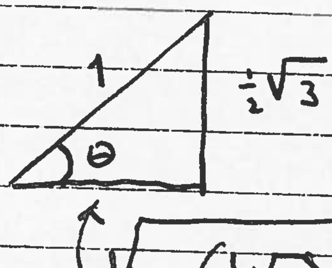


x	y
0	-6
$3/2$	$3/8$
$5/2$	$-3/8$
4	6

$1 \leq x \leq 2 \vee x \geq 3$

4. $\sin(\theta) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

a.



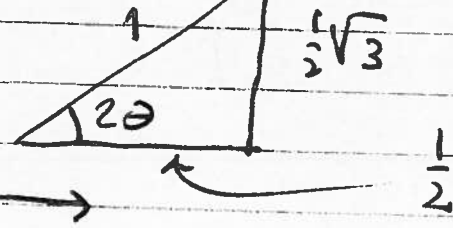
Pythagoras in eenheidscirkel:

$\sqrt{1-(\frac{1}{2}\sqrt{3})^2} = \sqrt{1-\frac{1}{4}\cdot 3} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

$\cos\theta = \frac{\text{aanliggende}}{\text{schuine}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$

b. $\sin 2\theta = 2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$



Dus ook $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$ →

$$\tan(2\theta) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

5. $$\tan\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)}$$

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta$$
$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\tan\theta = \frac{1-(1-2\sin^2\theta)}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} =$$
$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta\,!$$

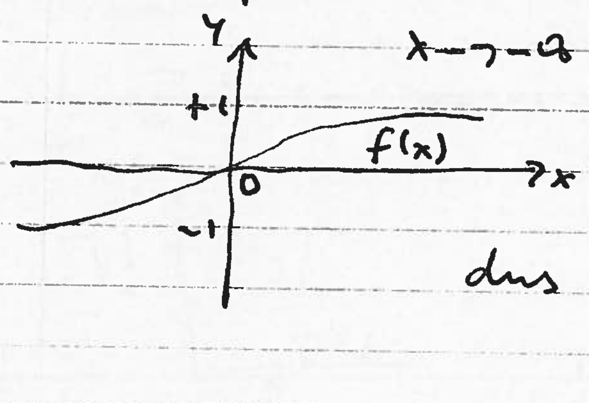
6. $$\ln\left(\frac{x^3 \cdot \tan^3 x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \ln x^3 + \ln\tan^3 x - \ln\sqrt{x^2-1} =$$
$$3\ln x + 3\ln(\tan x) - \frac{1}{2}\ln(x^2-1)$$

7. $$f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$$

a. <u>domein</u> : $\boxed{x \in \mathbb{R}}$

<u>bereik</u> : $$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{e^\infty-1}{e^\infty+1} = 1$$

$\boxed{-1 < y < 1}$ $$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{e^{-\infty}-1}{e^{-\infty}+1} = -1$$



Eén op één functie, dus de inverse functie bestaat !

c $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ → binnenste buiten keren

$y(e^x + 1) = e^x - 1$

$ye^x + y = e^x - 1$

$e^x(y - 1) = -y - 1$ →

$e^x = \frac{-y-1}{y-1} = \frac{y+1}{1-y}$

$x = \ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right)$ → x en y verwisselen

$f^{-1}(x) = y = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$

8. $\lim_{x \to -\infty} \frac{ax^2+1}{2x^2-5} = \frac{9}{4}$ $a \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{a + \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{5}{x^2}} = \frac{a}{2} = \frac{9}{4}$ →

$a = \frac{9}{2} = 4{,}5$

9. $\lim_{x \to 9^+} \frac{x+9}{x^2-81} = \lim_{x \to 9^+} \frac{(x+9)}{(x+9)(x-9)} =$

$\lim_{x \to 9^+} \frac{1}{(x-9)}$ $u = x - 9$ → Substitutie

$\lim_{u \to 0^+} \frac{1}{u} = +\infty$

10. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ → binnenste buiten.

$y = \dfrac{x-1}{x+1}$ → $y(x+1) = x-1$

$yx + y = x - 1$ → $x(y-1) = -y-1$

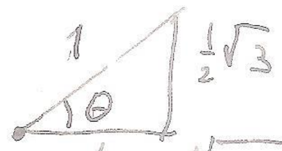
$x = \dfrac{-y-1}{y-1} = \dfrac{y+1}{1-y}$ x en y omwisselen

$y = f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{1-x}$

Bereik $f^{-1}(x)$ → $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$

4. $\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$\cos\theta = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$



$$\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1-\tfrac{3}{4}} = \sqrt{\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cdot\cos\theta = 2\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\tan(2\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \frac{\sin(2\theta)}{1-2\sin^2(\theta)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1-2\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1-2\cdot\frac{1}{4}\cdot 3} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1-\frac{3}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$